

建築数理基礎論 —振動論の基礎—

前田 匡樹

2018/4/12

建築数理基礎論

1

目的

- 建築物の耐震設計を学ぶ上で必要不可欠な振動論の基礎である
 - 1自由度系の線形応答の性質
 - 地震応答解析の方法について学習する
- コンピュータを用いて解析プログラムを作成する
 - 数値計算
 - データのファイルへの入出力
 - 計算結果のグラフ表示、アニメーション

2018/4/12

建築数理基礎論

2

講義の内容

- 1回目
 - 構造物のモデル化
 - 自由振動
- 2回目
 - 外力に対する応答
 - 地震応答スペクトル
- 3回目
 - 数値積分による振動方程式の解法
 - 応答解析プログラムの作成

教科書: 柴田明徳「最新耐震構造解析」、森北出版

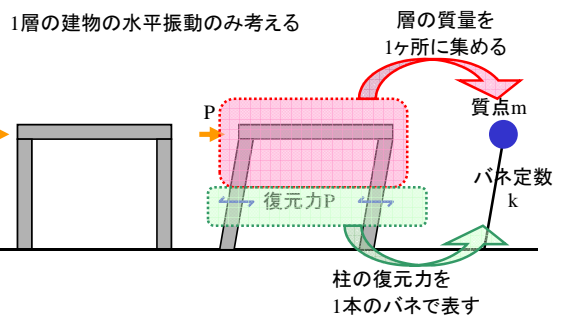
2018/4/12

建築数理基礎論

3

1. 構造物のモデル化

質点系モデル: 1自由度系



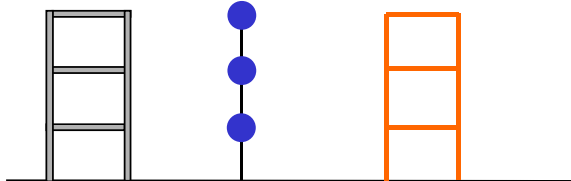
2018/4/12

建築数理基礎論

4

質点系モデルとフレームモデル

3層構造物



3質点系モデル
各層の梁・柱を1本の柱に集約
層(床)の水平変形の
み計算できる。

フレームモデル
梁、柱などの部材それぞれ
を1本の線材でモデル化
それぞれの部材の曲げ・せん断・軸変形を計算することができる

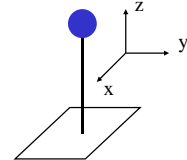
2018/4/12

建築数理基礎論

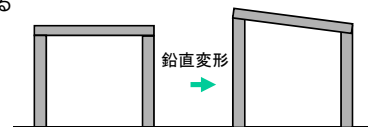
5

質点の自由度

実際には、空間中の質点には、
水平2方向(x方向、y方向)
鉛直方向(z方向)
の3つの自由度がある...



解析をする場合には、
• 水平1方向のみを考える
• 鉛直変形は無視することが多い。



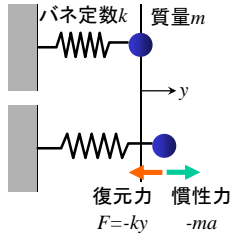
2018/4/12

建築数理基礎論

6

2. 非減衰自由振動

- Newtonの第2法則
質点に作用する外力 ΣF と ma (a : 加速度) はつりあう
 $\Sigma F = ma$
慣性力 ($-ma$) も外力の一部とみなせば
 $\Sigma F + (-ma) = 0$



2018/4/12

建築数理基礎論

7

運動方程式の解

力のつりあいから

$$-ky + (-m\ddot{y}) = 0$$

整理すると

$$m\ddot{y} + ky = 0 \rightarrow 2\text{階線形同次常微分方程式}$$

$$\omega^2 = k/m \text{ とおくと}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$

この微分方程式の解は、

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t \\ = A \cos(\omega t - \theta)$$

複素関数を用いた解は、

$$y = ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

2018/4/12

建築数理基礎論

8

運動方程式の解(続き)

$$y = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

初期条件: $t = 0$ のとき $y(0) = d_0$ $\dot{y}(0) = v_0$ とすると

$$y = d_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \\ = A \cos(\omega t - \theta)$$

$$\text{ただし、 } A = \sqrt{d_0^2 + (v_0/\omega)^2} \quad \tan \theta = v_0 / \omega d_0$$

A: 振幅、 ω : 固有円振動数

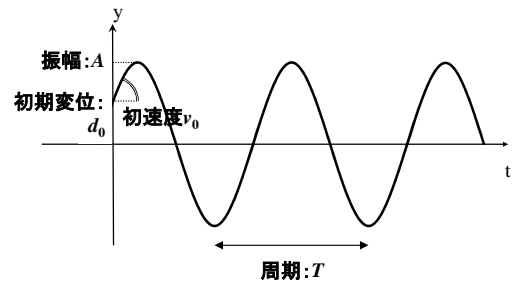
$$\text{固有周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

2018/4/12

建築数理基礎論

9

非減衰自由振動の変位(時刻歴)



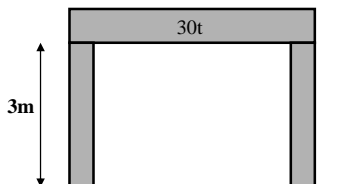
2018/4/12

建築数理基礎論

10

例題1

- 図の2本の柱と剛な梁からなる骨組みの固有周期を求めよ。



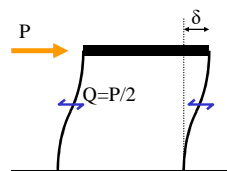
建物質量: 30t
 柱の断面: $600 \times 600\text{mm}$
 ヤング係数: $2 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$
 $= 2 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$

2018/4/12

建築数理基礎論

11

解答



【参考】

固有周期の略算式

RC造 $T = 0.02H$

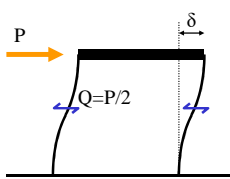
S造 $T = 0.03H$

H: 建物高さ(m)

2018/4/12

建築数理基礎論

解答



柱の水平変形とせん断力の関係

$$\delta = \frac{Qh^3}{12EI}$$

骨組の水平剛性は柱2本分で

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{Q}{\delta} \times 2 = \frac{12EI}{h^3} \times 2$$

$$= \frac{12 \times 2 \times 10^{10} \times 0.6^4 / 12 \times 2}{3^3}$$

$$= \frac{2^2 \times 6^4 \times 10^9}{3^3} = 1.92 \times 10^8 \text{ (N/m)}$$

【参考】

固有周期の略算式

RC造 T=0.02H

S造 T=0.03H

H: 建物高さ(m)

固有周期は

$$\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1.92 \times 10^8 / 30 \times 1000} = 80 \text{ (1/sec)}$$

$$T = 2\pi/\omega = 2 \times 3.14 \div 80 = 0.0785 \text{ (sec)}$$

2018/4/12

建築数理基礎論

13

3. 減衰自由振動

実際の構造物には、振動を減衰させる作用がある

■ 振動エネルギーが音、熱になり消費される

● 摩擦減衰

✓ 材料内部の摩擦、部材継手・接合部などの摩擦

✓ 構造物周囲の空気、水、地盤などの摩擦

● 塑性履歴減衰

✓ 降伏に伴う履歴ループによるエネルギー吸収

■ 振動エネルギーが系の外部に逃げて行く

● 逸散減衰

解析上は、数学的な扱いが容易な速度比例減衰モデルを使うことが多い

$$\text{減衰力} = -c\dot{y} \quad c: \text{粘性減衰係数}$$

2018/4/12

建築数理基礎論

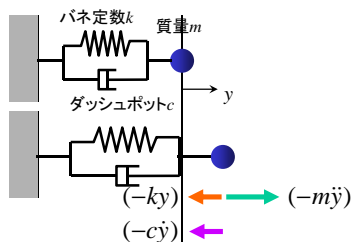
14

減衰自由振動の運動方程式

力のつりあいから

$$(-m\ddot{y}) + (-c\dot{y}) + (-ky) = 0$$

慣性力 減衰力 復元力



2018/4/12

建築数理基礎論

15

運動方程式の解

$$(-m\ddot{y}) + (-c\dot{y}) + (-ky) = 0$$

$$\omega^2 = k/m, \quad 2h\omega = c/m \quad \text{とおくと}$$

$$\ddot{y} + 2h\omega\dot{y} + \omega^2 y = 0$$

この微分方程式の解は、特性方程式を解いて

$$\lambda^2 + 2h\omega\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda = \left(-h \pm \sqrt{h^2 - 1} \right) \omega$$

hの値により、λが実数解か虚数解が変わる

h>1のとき λは実数解 → 振動しない(過減衰)

h=1のとき λは実数解(重解) → 振動しない(臨界減衰)

h<1のとき λは虚数解 → 振動する

2018/4/12

建築数理基礎論

16

運動方程式の解(続き)

h>1のとき

h=1のとき

h<1のとき

【参考】 建築構造物の減衰定数

RC造 h=2~7%程度

S造 h=0.5~3%程度 と言われている

2018/4/12

建築数理基礎論

17

運動方程式の解(続き)

h>1のとき

$$y = e^{-h\omega t} \left(A e^{\sqrt{h^2-1}\omega t} + B e^{-\sqrt{h^2-1}\omega t} \right)$$

h=1のとき

$$y = e^{-\omega t} (A + Bt)$$

h<1のとき

$$y = e^{-h\omega t} \left(A e^{i\sqrt{1-h^2}\omega t} + B e^{-i\sqrt{1-h^2}\omega t} \right)$$

$$= e^{-h\omega t} \left(a \cos \sqrt{1-h^2} \omega t + b \sin \sqrt{1-h^2} \omega t \right)$$

【参考】 建築構造物の減衰定数

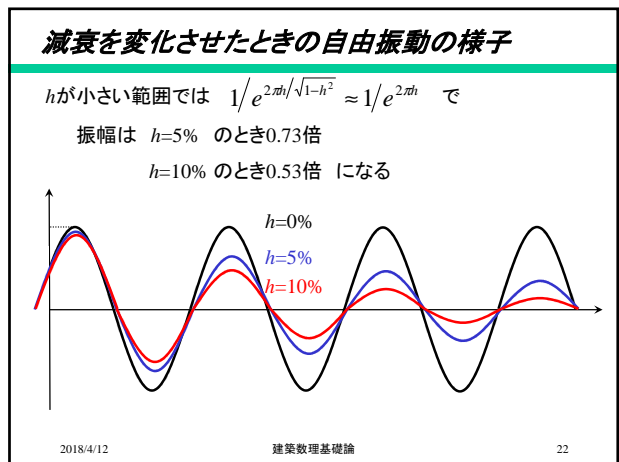
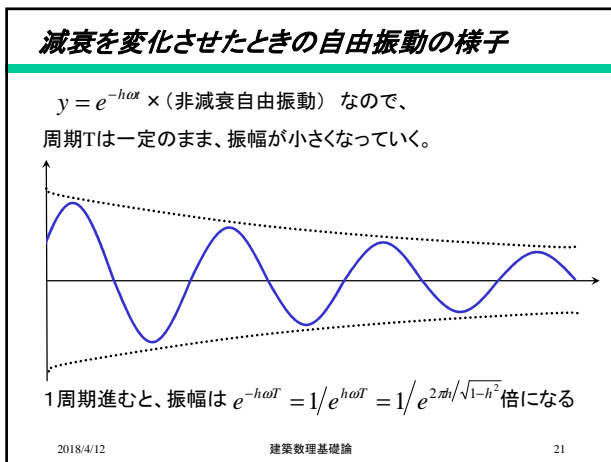
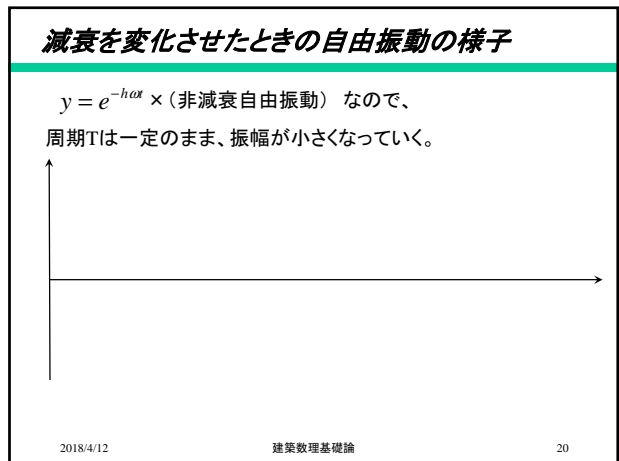
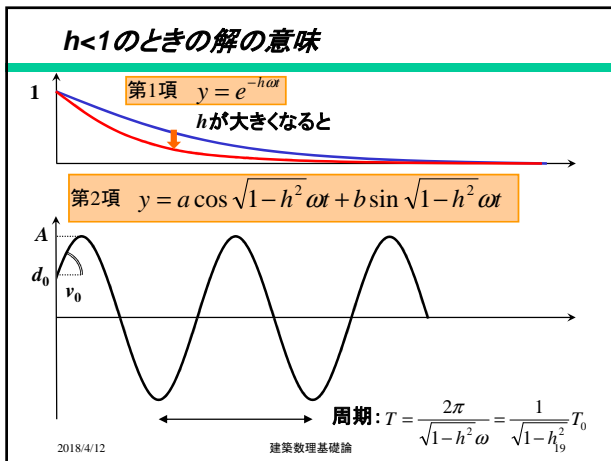
RC造 h=2~7%程度

S造 h=0.5~3%程度 と言われている

2018/4/12

建築数理基礎論

18



1質点系の解析プログラムのダウンロード

■ 性能制御システム学研究室のHP
[\(https://www.maedlab-tohoku-u.com/\)](https://www.maedlab-tohoku-u.com/)

ここ

圧縮されているので、
 適当なフォルダに解凍して使えます。

Visual Basic ver.6.0で
 作成しています。

2018/4/12 建築数理基礎論 23

