3 章　梁の応力と変形

3.1　梁

梁とは、建物の水平短径方向に架けられ、床や屋根などの荷重を柱に伝える材のことであり、主に曲げ応力を担う。 梁は主に鉛直荷重を伝えるが、地震などに際しては水平方向の荷重を支えることにもなる。

梁にかけられた荷重は、柱・壁・大梁に伝えられる。梁の端部に柱があるものを大梁、柱に直接繋がっていないものを小梁とよぶ。


建設中の人間・環境系建物


軍艦島の建物


PCaPC 構造の大空間


立教大学ロイドホール


ホキ美術館


第二敬神高速道路の橋桁

3.2　モールの定理

手計算で**静定梁**の曲げモーメントと変形を求めるには、モールの定理を用いるのが、簡単で直感的に理解しやすい。

モールの定理

<u>単純梁の場合</u>

① 曲げモーメント M を曲げ剛性 EI で割ったものを**仮想分布荷重** $w = M/EI$ とした梁を考える（仮想荷重はモーメント図と逆向きにすることに注意）。

② 仮想荷重 w によるせん断力が**たわみ角**θと等しい。

③ 仮想荷重 w による曲げモーメントが**たわみ**δと等しい。

<u>片持ち梁の場合</u>

① 曲げモーメント M を曲げ剛性 EI で割ったものを**仮想分布荷重** $w = M/EI$ とした梁を考える（荷重はモーメント図と逆向き。**固定端と自由端を入れ替える**）。

② **たわみ角**θと**たわみ**δはそれぞれせん断力、曲げモーメントと等しい（単純梁と同じ）。

<u>中央に集中荷重 P を受ける単純梁の変形の求め方</u>

① 荷重 P による M 図を書く（図 3. 1 (b)）

② 仮想荷重 w＝M/EI が作用する梁を考える（図 3. 1 (d)）

③ それぞれの点のたわみ角θは、(d)によるせん断力 Q から求める。

④ それぞれの点のたわみδは、(d)による曲げモーメント M から求める。

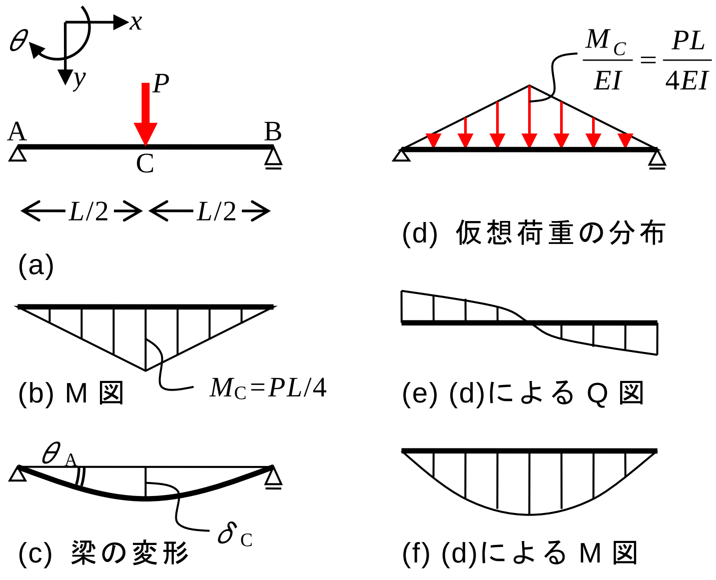


図 3.1

<u>何故、仮想荷重 $w(=M/EI)$に対するせん断力 Q、曲げモーメント M からたわみ角、たわみが求められるのか？</u>

図 3. 1 の単純梁で、変形（たわみ）y は下向きを正、たわみ角θは時計回りを正とする。
たわみ角は、たわみ曲線の傾きなので、数学的に表現すると、以下となる。

$$\text{たわみ角}\quad \theta = \frac{dy}{dx} \tag{3.1}$$

たわみ角の x 方向の変化率は、微小変形のとき曲率ϕ（曲率半径 R の逆数）と等しい。（ただし、符号は－）

$$\text{曲率}\quad \phi = \frac{1}{R} \approx -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2} \tag{3.2}$$

曲率ϕは、梁の曲がり方の程度で決まる値で、曲げモーメント M と曲げ剛性 EI（ヤング係数 E

と断面 2 次モーメント I の積）から以下の式で求められる。

曲率　　$\phi = \dfrac{M}{EI}$　　(3.3)

式(3.1)～(3.3)をまとめると、以下となる。

$$\frac{M}{EI} = -\frac{d\theta}{dx} = -\frac{d^2y}{dx^2} \qquad (3.4)$$

一方、梁に作用する荷重 w、せん断力 Q、曲げモーメント M には、以下の関係がある。

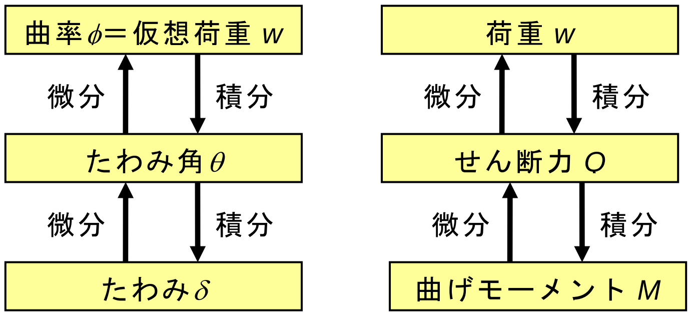
荷重 $-w = \dfrac{dQ}{dx}$　（Q 図の傾きが荷重）　(3.5)

せん断力 $Q = \dfrac{dM}{dx}$　（M 図の傾きがせん断力）　(3.6)

これらをまとめると、

$$w = -\frac{dQ}{dx} = -\frac{d^2M}{dx^2} \qquad (3.7)$$

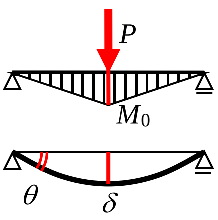
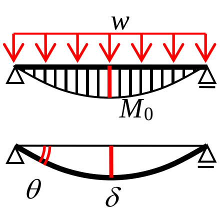
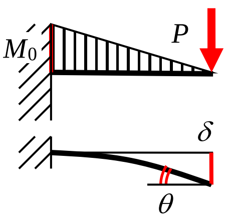
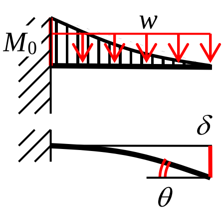
式(3.4)と式(3.7)を見比べると、右の図のように、ϕ, θ, δがそれぞれ微分・積分の関係にあるのと、w, Q, M の関係と全く同じであることに気がつく。



つまり、**元の梁の曲率** $\phi = \dfrac{M}{EI}$ **＝仮想荷重** w とおくと、**たわみ角**θ**＝せん断力** Q、**たわみ**δ**＝曲げモーメント** M となる。従って、仮想荷重 w に対する、せん断力図、曲げモーメント図から、元の梁のたわみ角θ、たわみδが求められることになる。

モールの定理を用いると、以下のように静定梁の変形を求めることが出来る。

表 3.1　静定梁の曲げモーメントおよび変形

	単純梁		片持ち梁	
	中央集中荷重 	等分布荷重 	先端集中荷重 	等分布荷重 
曲げモーメント M_0	$\dfrac{PL}{4}$	$\dfrac{wL^2}{8}$	PL	$\dfrac{wL^2}{2}$
たわみδ	$\dfrac{PL^3}{48EI}$	$\dfrac{5wL^4}{384EI}$		$\dfrac{wL^4}{8EI}$
たわみ角θ	$\dfrac{PL^2}{16EI}$	$\dfrac{wL^3}{24EI}$		$\dfrac{wL^3}{6EI}$

演習問題

［問題 3.1］

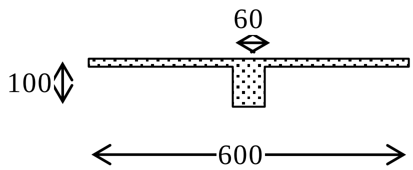
先端に集中荷重 P を受ける長さ L の片持ち梁の先端のたわみθとたわみδを、モールの定理を用いて求め、表 3.1 の空欄を完成させよ。

［問題 3.2］

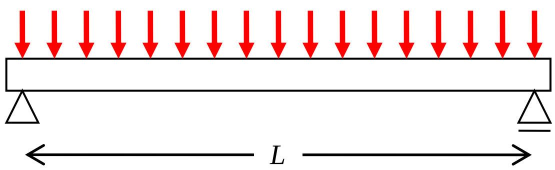
幅 6m の床を支えるコンクリート製の単純梁がある。梁の断面は幅 b=60cm、せい D＝100cm である。床と梁を合わせた単位重量（積載荷重も含む）は 8kN/m^2 である。この荷重が梁に等分布荷重として作用すると考える。コンクリートのヤング係数 E＝2×10^4 N/mm^2 とし、梁の断面 2 次モーメントは、床を無視して長方形断面の I＝bD^3/12 で求めてよい。

(1) スパン L が、4m、7m、10m のそれぞれについて、梁中央のたわみと、3 つのスパン場合のたわみの比を求めよ。

(2) 一般的に床の傾斜角が 1/200 を越えると、居住者が不快に感じるという。この梁の場合、不快に感じる限界を超えないためには、スパン長さをどの範囲にすれば よいか。
【参考】実際の建物では、コンクリートのひび割れやクリープという現象があるので、ヤング係数を 1/20 くらいの値に落として、床のたわみの検討をしている。



梁の断面



3.3　たわみ角法

両端にモーメントが作用する梁の両端の傾斜（たわみ角）を求めることは、連続梁やラーメンの力学の基本で極めて重要なことである。このような梁の応力解析法の一つにたわみ角法がある。たわみ角法は、基本公式を機械的に連続梁やラーメンに拡張して適用できるので、これらの応力解析によく用いられる方法で、マトリクス法の基本的な考え方につながる方法である。

たわみ角法の公式

単純梁の端部の曲げモーメント M とたわみ角 θ の関係は、以下の式で表される。

$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B) + C_{AB}$$

$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B) + C_{BA}$$

ただし、C_{AB}, C_{BA} は中間荷重による

固定端モーメント

K は剛度＝I/L

中間荷重が作用しない場合は、$C_{AB} = C_{BA} = 0$

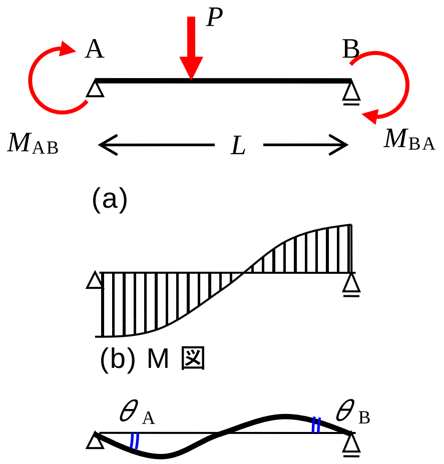
$$M_{AB} = 2EK(2\theta_A + \theta_B)$$

$$M_{BA} = 2EK(\theta_A + 2\theta_B)$$

変形すると

$$\theta_A = \frac{1}{6EK}(2M_{AB} - M_{BA})$$

$$\theta_B = \frac{1}{6EK}(-M_{AB} + 2M_{BA})$$



(a)

(b) M 図

(c) 梁の変形

図 3.2

たわみ角法の基本公式は、3.2 節で勉強したモールの定理を使って導くことができる。

A 端のみに曲げモーメント M_{AB} が作用する単純梁の両端のたわみ角を求めてみる。

曲げモーメント M_{AB} による M 図は図 3.3(b)で、これより図 3.3(c)のような仮想荷重に対するせん断力が両端のたわみ角 θ_A、θ_B に等しい。A 端および B 端のせん断力は支点反力なので、

$$\theta_A = \frac{M_{AB}L}{2EI} \times \frac{2L/3}{L} = \frac{M_{AB}L}{3EI} = \frac{M_{AB}}{3EK} \qquad (3.8)$$

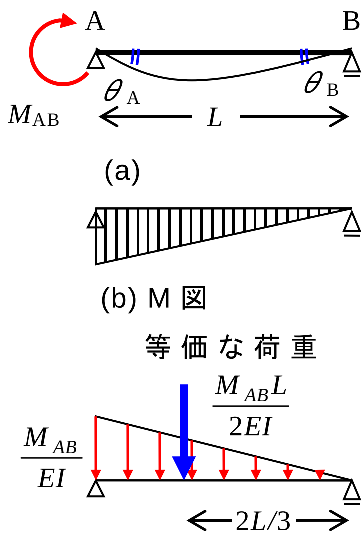
$$\theta_B = -\frac{M_{AB}L}{2EI} \times \frac{L/3}{L} = -\frac{M_{AB}L}{6EI} = -\frac{M_{AB}}{6EK} \qquad (3.9)$$

※せん断力は時計回りが正

同様に、B 端のみに曲げモーメント M_{BA} が作用する単純梁の両端のたわみ角を求めると、

$$\theta_A = -\frac{M_{BA}}{6EK} \qquad (3.10)$$

$$\theta_B = \frac{M_{BA}}{3EK} \qquad (3.11)$$



(a)

(b) M 図

(c) 仮想荷重

図 3.3

両端に曲げモーメントが作用する場合は、上の 2 つの場合の合計になるので、式(3.8)と式(3.10)、式(3.9)と式(3.11)の右辺をそれぞれ足し合わせて、

$$\theta_A = \frac{M_{AB}}{3EK} - \frac{M_{BA}}{6EK} = \frac{1}{6EK}\left(2M_{AB} - M_{BA}\right) \qquad (3.12)$$

$$\theta_B = -\frac{M_{AB}}{6EK} + \frac{M_{BA}}{3EK} = \frac{1}{6EK}\left(-M_{AB} + 2M_{BA}\right) \qquad (3.13)$$

と**たわみ角法の基本公式**が得られる。

たわみ角法により、不静定骨組である連続梁の応力解析を行うことができる。
図 3.4 のような A,C 端が固定された連続梁を考える。A,C 端は固定なので、

$\theta_A = 0,\ \theta_C = 0$　　未知数はθ_B　である。

ここで、標準剛度 $K_0=I/L$、剛比 $k=K/K_0$ とおくと、$k_{AB}=1,\ k_{BC}=1/2$ となる。
（※　$K_0=I/2L$ とおき、$k_{AB}=2,\ k_{BC}=1$ としても、結果は変わらない。剛比は単なる比なので）
部材の材端モーメントは、

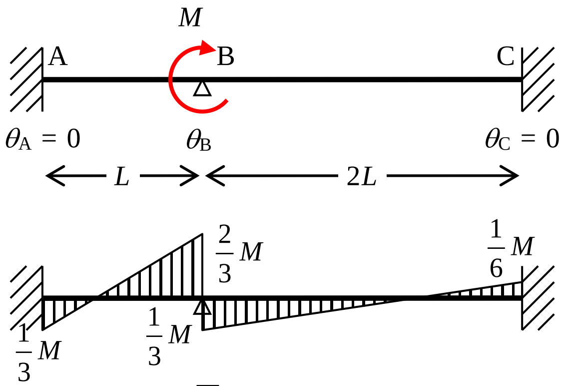


図 3.4

梁 AB

$$M_{AB} = 2EK_0 k_{AB}\left(2\theta_A + \theta_B\right) = 2EK_0\theta_B$$
$$M_{BA} = 2EK_0 k_{AB}\left(\theta_A + 2\theta_B\right) = 4EK_0\theta_B \qquad (3.14)$$

梁 BC

$$M_{BC} = 2EK_0 k_{BC}\left(2\theta_B + \theta_C\right) = 2EK_0\theta_B$$
$$M_{CB} = 2EK_0 k_{BC}\left(\theta_B + 2\theta_C\right) = EK_0\theta_B \qquad (3.15)$$

節点での力のつりあい条件
（**外力のモーメント＝材端モーメントの和**）より、

節点 B

$$M = M_{BA} + M_{BC} = 6EK_0\theta_B \qquad (3.16)$$

よって、$\theta_B = \dfrac{M}{6EK_0}$ と求まり、

各材端モーメントは、

$$M_{AB} = \frac{1}{3}M,\quad M_{BA} = \frac{2}{3}M,\quad M_{BC} = \frac{1}{3}M,\quad M_{CB} = \frac{1}{6}M$$ となる。

この結果のモーメント図を見ると、**力の流れに関する重要な性質**がわかる。

① **節点モーメントは、部材の剛比に従って分配される。**

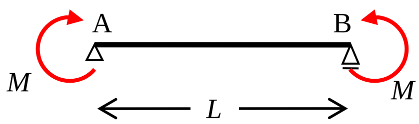
節点 B のモーメント M は、梁 AB と梁 BC の剛比（2:1）の比率で、$2M/3$ と $M/3$ が伝わる。

② **部材の材端モーメントの 1/2 が反対側の固定端に伝達される。**

梁 AB の A 端、梁 BC の C 端のモーメントは、節点 B のモーメントの 1/2 になっている。
これらの性質は、後で学習する固定法で用いるし、構造物内の大まかな力の流れを把握する上で、きわめて重要な性質なので、覚えておくとよい。

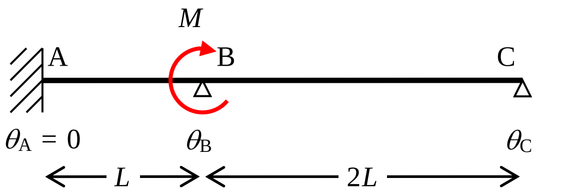
演習問題

［問題 3.3］



右図のように、両端に逆対称な曲げモーメントが作用する梁の両端のたわみ角を、モールの定理とたわみ角法の 2 つの方法で求め、答えが一致することを確かめよ。

［問題 3.4］

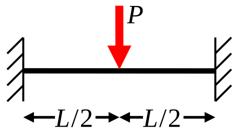
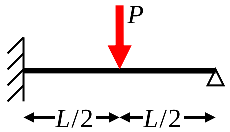
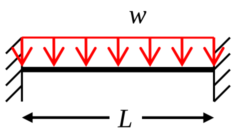
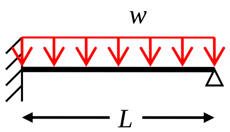


右図の連続梁の M 図をたわみ角法で求めよ。
【ヒント】C 端はピンなので、
外力のモーメント＝0

3.4　固定端モーメント

固定梁の固定端に作用するモーメントを**固定端モーメント**（Fixed End Moment）という。固定端モーメントは、不静定梁や連続梁、不静定ラーメンの応力解析をする際に必要な情報である。

表 3.2　種々の荷重に対する固定端モーメント

	固定端モーメント A 端	固定端モーメント B 端	単純梁の最大モーメント M_0
	$C_{AB}=-\dfrac{PL}{8}$	$C_{BA}=\dfrac{PL}{8}$	$M_0=\dfrac{PL}{4}$
	$H_{AB}=-\dfrac{3PL}{16}$	0	$M_0=\dfrac{PL}{4}$
	$C_{AB}=-\dfrac{wL^2}{12}$	$C_{BA}=\dfrac{wL^2}{12}$	$M_0=\dfrac{wL^2}{8}$
	$H_{AB}=-\dfrac{wL^2}{8}$	0	$M_0=\dfrac{wL^2}{8}$

中央集中荷重 P を受ける A 端固定、B 端ピンの梁の固定端モーメント H_{AB} を求めてみる。図 3.5 のように、集中荷重 P を受ける単純梁（図 3.5(a)）と A 端のみに曲げモーメント M を受ける単純梁（図 3.5(d)）を考え、これらを重ね合わせたとき、それぞれの A 端の回転角の和

$$\theta_A=\theta_{A0}+\theta_{A1}=0 \tag{3.17}$$

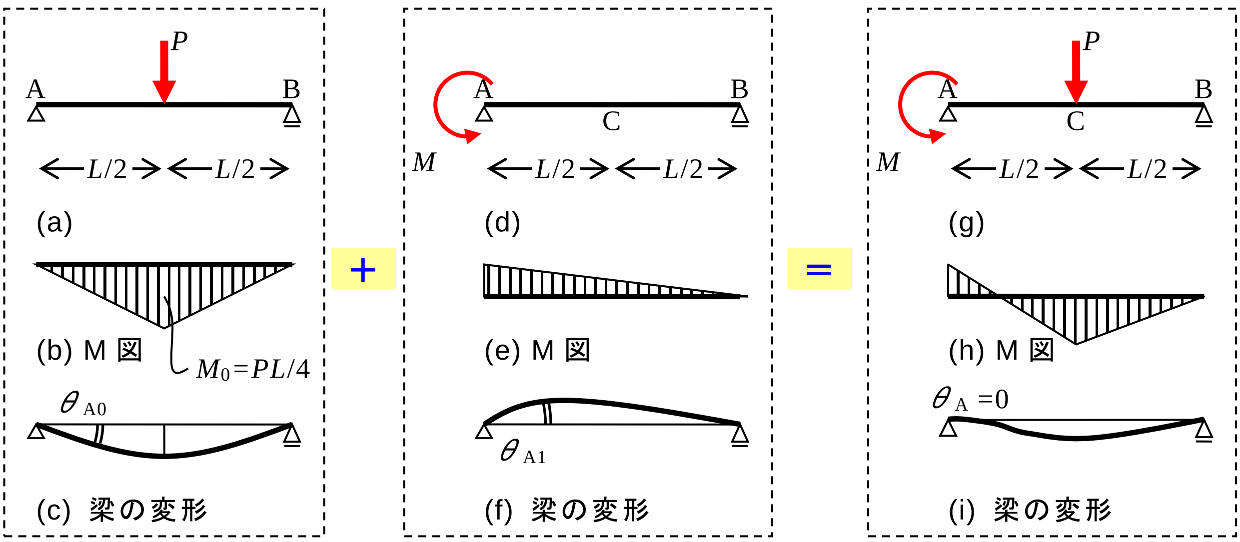


図 3.5

となるようなモーメント M を作用させれば、A 端に回転が生じないので、実質的には固定端と同じである（図 3.5(g)）。したがって、そのときの曲げモーメント M が固定端モーメントに等しい。

図 3.5(a)に対するたわみ角 θ_{A0} は、表 2.1 より

$$\theta_{A0} = \frac{PL^2}{16EI} \tag{3.18}$$

図 3.5(d)に対するたわみ角 θ_{A1} は、式(3.8)より

$$\theta_{A1} = \frac{ML}{3EI} \tag{3.19}$$

式(3.17)に式(3.18),(3.19)を代入すると

$\frac{PL^2}{16EI} + \frac{ML}{3EI} = 0$ より

固定端モーメント $H_{AB} = -\frac{3PL}{16}$

が得られる。

演習問題

［問題 3.5］

問題 3.3 の結果を利用して、中央集中荷重 P を受ける両端固定梁の固定端モーメントが、$C_{AB} = -\frac{PL}{8}$ となることを導け。

3.5　固定法による連続梁の解法

実際の建物の梁は、単純梁や両端固定梁のようなものはあまりなく、何スパンかにわたって連続する梁（連続梁）が一般的である。梁には、自重に加えて床や小梁から固定荷重や積載荷重が鉛直方向に作用する。
連続梁やラーメンなどの不静定骨組の応力解析法の一つに**固定法**がある。不静定骨組の解法として 2.2 節で勉強した**たわみ角法**もある。**たわみ角法**は、節点のたわみ角を未知数として、節点モーメントのつりあい方程式を立て､連立方程式を解くことで､部材端モーメントを求める。これは、方法としては非常にシンプルでわかりやすい方法であるが、部材数（節点数）が多い（不静定次数の高い）構造物になるほど連立方程式の数が増えて、手計算で解くのは大変になる。たわみ角法は、どちらかというとあまり頭を使わずに力技で解く方法であり、プログラムを組んでコンピュータで計算させるのに適した方法である。
今から数十年前まではコンピュータはなかったので、不静定次数の高い構造物も手計算で略算する方法について研究が行われ開発された。**固定法**もその一つで、それぞれの節点で、**不釣合モーメント**（外力と部材端の固定端モーメントの差）を**剛比**に従って接続する部材に分配することを繰り返していく解析法である。固定法は、節点の不釣合モーメントを部材の剛比に従って分配していく方法で、構造物内の応力の流れをイメージしやすい方法である。

固定法のイメージを図 3.6(a)の中間荷重を受ける連続梁を使って説明する。

① 節点 B が固定点（回転角=0）であると仮定して、モーメント図を求める（図(b)）。
これは、節点 B に左右の梁の固定端モーメントの和（$C_{AB}+C_{BC}$、**不釣合モーメント**）に相当する拘束モーメント C_B を加えたことになる。

② 同じ梁に、拘束モーメントを解除するモーメント－ C_B を作用させたときの M 図を求める（図(c)）。
【求め方】節点モーメントを、剛比の比率で、左右の梁に分配する。分配したモーメントの 1/2 を他端に伝達する（p.2-5 のたわみ角法の項を参照）。

③ 上記の 2 つの応力状態を合計（図(b)と図(c)の和）すれば、不釣合モーメント C_B と解除モーメント-C_B が打ち消しあって､図(a)と同じ外力の状態になるので、求める M 図になる。

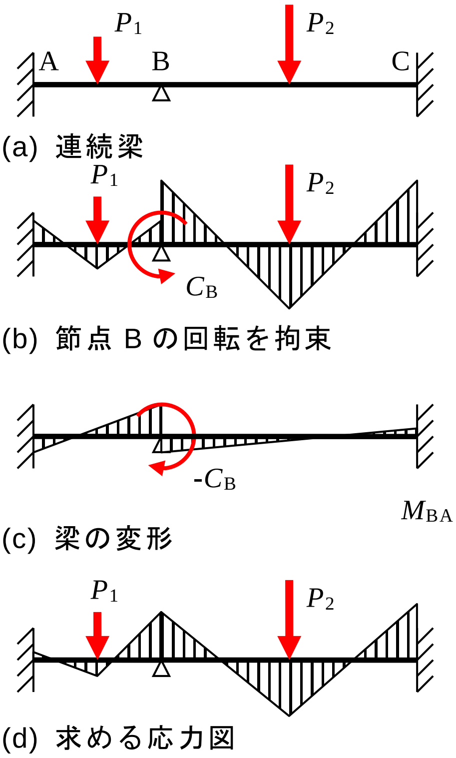


図 3.6

固定法による M 図の解法

① 中間荷重が作用する部材の固定端モーメント *FEM* を求める

② 各節点に接続する部材の有効剛比からモーメントの分配率 $DF = \dfrac{k}{\sum k}$ を求める。（$\sum k$ はその節点の部材の剛比の合計）

③ 各節点の**不釣合いモーメント（外力ー*FEM* の合計）**を分配率 *DF* に従い、各部材に分配する。

④ 各部材で分配された節点モーメント（**分配モーメント** *D*）の 1/2 を他端に伝達させる（**到達モーメント** *C*）。

⑤ 各節点で不釣合いモーメント（$-\sum C$）を求める。

⑥ 全ての節点で $-\sum C = 0$ となれば、⑦へ。$-\sum C \neq 0$ の場合は、③へ戻り再度不釣合いモーメントを分配する。これを、全ての節点で $-\sum C = 0$ となるまで繰り返す。（収束計算。通常は、2-3 回繰り返すと不釣合いモーメントが無視できる程度に小さくなるので、そこでやめる）

⑦ 各材端でモーメントを合計すると、求める材端モーメントが得られる。

(1)　中間節点が 1 つの場合（収束計算が不要）

図 3.7 のような等分布荷重を受ける梁の *M* 図を固定法で求めてみる。

梁断面の曲げ剛性 *EI* は一定とすると、梁 AB と梁 BC の剛比は、長さに反比例するので、3 : 2 である。従って、節点 B でのモーメントの分配率 DF は、0.6 と 0.4 になる。

それぞれの梁の固定端モーメント（FEM）を求める。

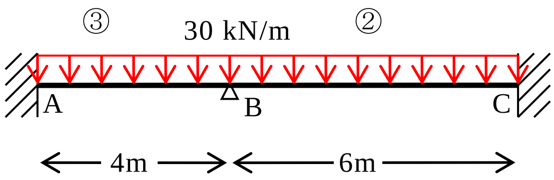


図 3.7

$$-C_{AB} = C_{BA} = \frac{30 \times 4^2}{12} = 40\, kN \cdot m \qquad (3.20)$$

$$-C_{BC} = C_{CB} = \frac{30 \times 6^2}{12} = 90\, kN \cdot m \qquad (3.21)$$

	AB		BA	BC		CB
DF			0.60	0.40		
FEM						
D						
C						
Σ						

節点 B の解除モーメント（FEM の和のマイナス）は、-(40+(-90))=50 で、これを分配率 DF に従い分配する（D）。

分配されたモーメントの 1/2 を他端に伝達する（C）。

各部材端で、FEM、C、D を合計すると、実際の部材端モーメントが求まる。部材中央のモーメントは、部材端モーメントと、単純梁の中央モーメントから求め、M 図を描くと図 3.8 のようになる。

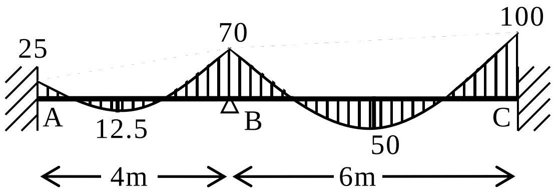


図 3.8

念のために、たわみ角法でも解いてみる。

材端モーメントは、

<u>梁 AB</u>

$$M_{AB} = 2EK_0 \cdot 3 \cdot (2\theta_A + \theta_B) + C_{AB} = 6EK_0\theta_B - 40$$
$$M_{BA} = 2EK_0 \cdot 3 \cdot (\theta_A + 2\theta_B) + C_{BA} = 12EK_0\theta_B + 40 \qquad (3.22)$$

<u>梁 BC</u>

$$M_{BC}=2EK_0\cdot 2\cdot\left(2\theta_B+\theta_C\right)+C_{BC}=8EK_0\theta_B-90$$
$$M_{CB}=2EK_0\cdot 2\cdot\left(\theta_B+2\theta_C\right)+C_{CB}=4EK_0\theta_B+90 \tag{3.23}$$

節点 B での力のつりあい条件

（外力のモーメント＝材端モーメントの和）より、

<u>節点 B</u>

$$M_{BA}+M_{BC}=0$$
$$20EK_0\theta_B-50=0 \tag{3.24}$$

よって、$\theta_B=\dfrac{2.5}{EK_0}$ と求まり、各材端モーメントは、

$$M_{AB}=6EK_0\frac{2.5}{EK_0}-40=15-40=-25$$
$$M_{BA}=12EK_0\frac{2.5}{EK_0}+40=30+40=70$$
$$M_{BC}=8EK_0\frac{2.5}{EK_0}-90=20-90=-70 \tag{3.25}$$
$$M_{CB}=4EK_0\frac{2.5}{EK_0}+90=10+90=100$$

と求まり、固定法の結果と一致する。

(2)　中間節点が複数の場合（収束計算が必要）

図 3.9 のような中間節点が二つ以上ある場合の解法も基本的に同様であるが、中間節点で不釣合モーメントを分配したあとにも、隣の節点から伝達モーメント C が来て、再び不釣合モーメントが生じるので、これを再度分配する。これを繰り返して、不釣合が無くなるまで繰り返す。（実用的には、2,3 回繰り返せば、誤差は小さくなるので、計算を打ち切り近似値を求めるので十分である）

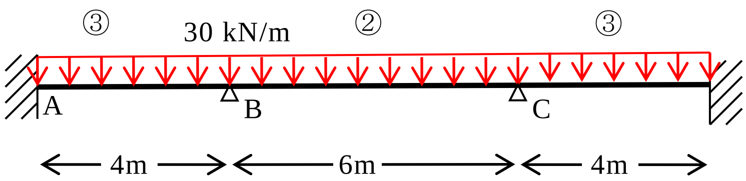


図 3.9

	AB		BA	BC		CB	CD		DC
DF			0.60	0.40		0.40	0.60		
FEM	-40		40	-90		90	-40		40
D_1			30	20		-20	-30		
C_1	15			-10		10			-15
D_2			6	4		-4	-6		
C_2	3			-2		2			-3
D_3			1.2	0.8		-0.8	-1.2		
C_3	0.6								-0.6
Σ	-21.4		77.2	-77.2		77.2	-77.2		21.4

たわみ角法により正解を求めると、

$$-M_{AB}=M_{DC}=21.25,\quad M_{BA}=-M_{BC}=M_{CB}=-M_{CD}=77.5\,\mathrm{kN\cdot m}$$

となり誤差は 1%以下となる

図 3.9 の構造物のように、梁の長さや支持条件(ピンや固定端)、荷重の状態が左右対称な場合、計算しなくても、梁 BC は曲げモーメント分布や、たわみ角が左右対称になると予想できる。このような部材を**対象部材**といい、剛比を 1/2 にした**有効剛比**を用いて連続梁の片側だけ計算することで正解が得られる。
これは、たわみ角法で、最初から対象の条件（$\theta_B = -\theta_C$）を使って計算をしていることに相当する。

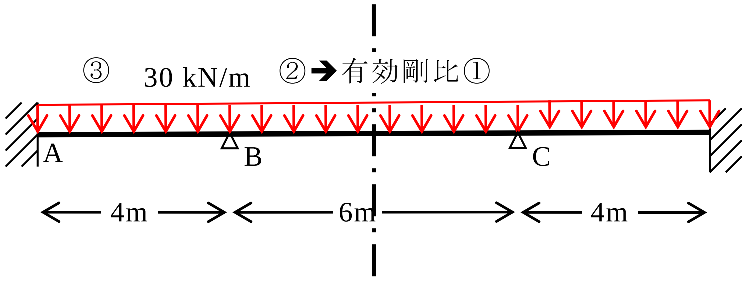


図 3.10

	AB		BA	BC
DF			0.75	0.25
FEM	-40		40	-90
D			37.5	12.5
C	18.75			
Σ	-21.25		77.5	-77.5

その他にも、逆対象部材や一端がピン（節点モーメント M=0）の部材では、有効剛比用いることで計算を簡略化することができる。

部材の有効剛比 k_e

部材の対象条件による有効剛比は、

①対象部材　$k_e = \frac{1}{2}k$

②逆対象部材　$k_e = \frac{3}{2}k$

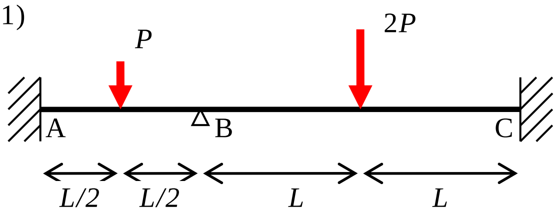
③一端がピンの部材　$k_e = \frac{3}{4}k$

演習問題

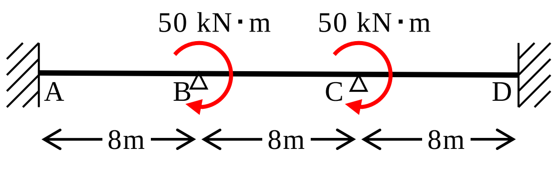
［問題 3.6］

右図のような連続梁の M 図を、固定法とたわみ角法で求めよ。

(1)



(2)



(3)